В **задачах 1 — 15** вычислить пределы.

1. $\lim\limits_{x\to 0} x\cdot e^x$. Подставим предельное значение x=0 в данную функцию:

$$\lim_{x\to 0} x\cdot e^x = 0\cdot e^0 = 0\cdot 1 = 0\ .$$

2. $\lim\limits_{x\to -1-0} \dfrac{x-1}{x^2+x}$.

Подставим предельное значение x=-1 в данную функцию. Числитель будет равен конечному, отличному от нуля числу (-2), а знаменатель обратится в нуль. По теореме о связи бесконечно больших и бесконечно малых функций такой предел равен бесконечности. Этот ответ может быть уточнён, поскольку возможно установить знак не только числителя (отрицательный), но и знаменателя: $x(x+1)>0$. Это произведение положительное, поскольку оба сомножителя при $x\to -1-0$ меньше нуля. Итак, при $x\to -1-0$ функция отрицательная, и, следовательно, по теореме о знакопостоянстве функции, её предел не может быть положительным. А так как этот предел бесконечен, то это минус бесконечность.

$$\lim_{x\to -1-0} \frac{x-1}{x^2+x} = \lim_{x\to -1-0} \frac{x-1}{x(x+1)} = \left[\frac{-2}{-1\cdot(-0)}\right] = \left[\frac{-2}{+0}\right] = -\infty\ .$$

3.

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{2^{x-1}+4^{x+1}-6}{3\cdot 4^x - \frac{1}{4}\cdot 3^{x+3}+2} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{2^x}{2}+4\cdot 4^x-6}{3\cdot 4^x - \frac{27}{4}\cdot 3^x+2} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{1}{2\cdot 2^x}+4-\frac{6}{4^x}}{3-\frac{27}{4}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^x+\frac{2}{4^x}} = \frac{\frac{0}{2}+4-6\cdot 0}{3-\frac{27}{4}\cdot 0+2\cdot 0} = \frac{4}{3}\ ,$$

поскольку функции $\dfrac{1}{2^x}$, $\dfrac{1}{4^x}$ и $\left(\dfrac{3}{4}\right)^x$ бесконечно малые при $x\to +\infty$.

4.

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{1}{x^2-5x+6}-\frac{2}{x^2-4x+3}\right) = \lim_{x\to 3}\left(\frac{1}{(x-2)(x-3)}-\frac{2}{(x-1)(x-3)}\right) = \lim_{x\to 3}\frac{(x-1)-2(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)} =$$

$$= \lim_{x\to 3}\frac{x-1-2x+4}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \lim_{x\to 3}\frac{3-x}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \lim_{x\to 3}\left(\frac{-1}{(x-1)(x-2)}\right) = \frac{-1}{(3-1)(3-2)} = -\frac{1}{2}\ .$$

5.

$$\lim_{x\to 10}\frac{\sqrt{x-1}-3}{x-10} = \lim_{x\to 10}\frac{(\sqrt{x-1}-3)(\sqrt{x-1}+3)}{(x-10)(\sqrt{x-1}+3)} = \lim_{x\to 10}\frac{\sqrt{x-1}^2-3^2}{(x-10)(\sqrt{x-1}+3)} = \lim_{x\to 10}\frac{x-1-9}{(x-10)(\sqrt{x-1}+3)} =$$

$$= \lim_{x\to 10}\frac{x-10}{(x-10)(\sqrt{x-1}+3)} = \lim_{x\to 10}\frac{1}{\sqrt{x-1}+3} = \frac{1}{\sqrt{10-1}+3} = \frac{1}{6}\ .$$

6. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x^2-1)}{x^2+x-2}$. Поскольку при $x\to 1$ аргумент синуса (x^2-1) является бесконечно малым (стремится к нулю), то при вычислении предела можно поменять числитель на эквивалентную ему функцию, то есть на его аргумент:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin(x^2-1)}{x^2+x-2} = \lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{(x-1)(x+2)} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+2)} = \lim_{x\to 1}\frac{x+1}{x+2} = \frac{2}{3}$$

7. $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x-3}\right)^{3x-3} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-3+3+2}{x-3}\right)^{3x-3} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x-3}\right)^{3x-3} = \lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{5}{x-3}\right)^{\frac{x-3}{5}}\right)^{\frac{5}{x-3}\cdot(3x-3)} =$$

поскольку функция $\dfrac{5}{x-3}$ бесконечно малая при $x\to\infty$, то

$$= e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5}{x-3}\cdot(3x-3)} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{15x-15}{x-3}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{15-\frac{15}{x}}{1-\frac{3}{x}}} = e^{\frac{15-0}{1-0}} = e^{15}$$, поскольку функция $\dfrac{1}{x}$ бесконечно малая при $x\to\infty$.

8. $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-x}{x^2+1}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1-1-x}{x^2+1}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-1-x}{x^2+1}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{-1-x}{x^2+1}\right)^{\frac{x^2+1}{-1-x}}\right)^{\frac{-1-x}{x^2+1}\cdot x} =$$

поскольку $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-1-x}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x^2}} = \dfrac{-0-0}{1+0} = 0$, то функция $\dfrac{-1-x}{x^2+1}$ является бесконечно малой при $x\to\infty$, и, следовательно:

$$= e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-1-x}{x^2+1}\cdot x} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-x-x^2}{x^2+1}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-\frac{1}{x}-1}{1+\frac{1}{x^2}}} = e^{\frac{-0-1}{1+0}} = e^{-1} = \frac{1}{e}\ .$$

В **задачах 9 — 15** вычислить пределы с помощью правила Лопиталя:

9. $$\lim_{x\to1}\frac{x^{13}-5x^9-4x^7+6x^2+2}{x^8-x^4+x^2-1} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to1}\frac{(x^{13}-5x^9-4x^7+6x^2+2)'}{(x^8-x^4+x^2-1)'} =$$

$$= \lim_{x\to1}\frac{13x^{12}-5\cdot9x^8-4\cdot7x^6+6\cdot2x}{8x^7-4x^3+2x} = \frac{13-45-28+12}{8-4+2} = \frac{-48}{6} = -8\ .$$

10. $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{\ln^3 x}}{x} = \left[\frac{+\infty}{+\infty}\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln^{3/2}x)'}{x'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{(3/2)(\ln^{1/2}x)\cdot1/x}{1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{3\cdot\ln^{1/2}x}{2x} =$$

$$= \left[\frac{+\infty}{+\infty}\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{(3\cdot\ln^{1/2}x)'}{(2x)'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{3\cdot(1/2)\cdot(\ln^{-1/2}x)\cdot1/x}{2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{3}{4x\cdot\ln^{1/2}x} =$$

$$= \left[\frac{3}{4\cdot(+\infty)(+\infty)}\right] = \left[\frac{3}{+\infty}\right] = 0$$

11. $$\lim_{x\to0}\frac{\cos2x-1}{e^{3x}-1-3x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to0}\frac{(\cos2x-1)'}{(e^{3x}-1-3x)'} = \lim_{x\to0}\frac{-2\sin2x}{3e^{3x}-3} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to0}\frac{(-2\sin2x)'}{(3e^{3x}-3)'} =$$

$$= \lim_{x\to0}\frac{-2\cdot2\cos2x}{3\cdot3e^{3x}} = -\frac{4}{9}\ .$$

12. $\lim\limits_{x\to+0}\left(x\cdot e^{\frac{1}{x}}\right) = \left[+0\cdot e^{+\infty}\right] = \left[+0\cdot(+\infty)\right]$. Сделаем замену переменной t=1/x $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ x=1/t. При $x\to+0$,будет $t\to+\infty$. Теперь

$$\lim_{x\to+0}\left(x\cdot e^{\frac{1}{x}}\right) = \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{1}{t}\cdot e^t\right) = \lim_{t\to+\infty}\frac{e^t}{t} = \left[\frac{+\infty}{+\infty}\right] = \lim_{t\to+\infty}\frac{(e^t)'}{t'} = \lim_{t\to+\infty}\frac{e^t}{1} = \left[\frac{+\infty}{1}\right] = +\infty\ .$$

13. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x^3\cdot e^{\frac{1}{x^2}}} = \left[\dfrac{1}{0\cdot e^{+\infty}}\right] = \left[\dfrac{1}{0\cdot(+\infty)}\right]$. Сделаем замену переменной t=1/x $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ x=1/t. При $x\to0$,будет $t\to\infty$. Теперь

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3\cdot e^{\frac{1}{x^2}}}=\lim_{t\to\infty}\frac{t^3}{e^{t^2}}=\left[\frac{\infty}{e^{+\infty}}\right]=\left[\frac{\infty}{+\infty}\right]=\lim_{t\to\infty}\frac{(t^3)'}{(e^{t^2})'}=\lim_{t\to\infty}\frac{3t^2}{2te^{t^2}}=\lim_{t\to\infty}\frac{3t}{2e^{t^2}}=\left[\frac{\infty}{e^{+\infty}}\right]=\left[\frac{\infty}{+\infty}\right]=$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{(3t)'}{(2e^{t^2})'}=\lim_{t\to\infty}\frac{3}{2\cdot 2te^{t^2}}=\left[\frac{3}{4\cdot\infty\cdot e^{+\infty}}\right]=\left[\frac{3}{4\cdot\infty\cdot(+\infty)}\right]=\left[\frac{3}{\infty}\right]=0\ .$$

14. $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2\cdot e^x)$. Такого предела не существует. Это утверждение следует из того, что пределы от этой функции при $x\to-\infty$ и при $x\to+\infty$ различные. Действительно:

$$\lim_{x\to-\infty}(x^2\cdot e^x)=\left[+\infty\cdot e^{-\infty}\right]=\left[+\infty\cdot(+0)\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{e^{-x}}=\left[\frac{+\infty}{e^{+\infty}}\right]=\left[\frac{+\infty}{+\infty}\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{(x^2)'}{(e^{-x})'}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{-e^{-x}}=\left[\frac{-\infty}{-e^{+\infty}}\right]=\left[\frac{-\infty}{-\infty}\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{(2x)'}{(-e^{-x})'}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{+e^{-x}}=\left[\frac{2}{e^{+\infty}}\right]=\left[\frac{2}{+\infty}\right]=0\ ,$$ а

$$\lim_{x\to+\infty}(x^2\cdot e^x)=\left[+\infty\cdot e^{+\infty}\right]=\left[+\infty\cdot(+\infty)\right]=+\infty\ .$$

15. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x+1)e^x}{x^2+1}$. Такого предела не существует. Это утверждение следует из того, что пределы от этой функции при $x\to-\infty$ и при $x\to+\infty$ различные. Действительно:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{(x+1)e^x}{x^2+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{(x^2+1)e^{-x}}=\left[\frac{-\infty}{+\infty\cdot e^{+\infty}}\right]=\left[\frac{-\infty}{+\infty\cdot(+\infty)}\right]=\left[\frac{-\infty}{+\infty}\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{(x+1)'}{((x^2+1)e^{-x})'}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{2xe^{-x}+(x^2+1)e^{-x}(-1)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{(2x-x^2-1)e^{-x}}=\left[\frac{1}{-\infty\cdot e^{+\infty}}\right]=\left[\frac{1}{-\infty\cdot(+\infty)}\right]=0$$, а

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+1)e^x}{x^2+1}=\left[\frac{+\infty\cdot e^{+\infty}}{+\infty}\right]=\left[\frac{+\infty\cdot(+\infty)}{+\infty}\right]=\left[\frac{+\infty}{+\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{((x+1)e^x)'}{(x^2+1)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+(x+1)e^x}{2x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+2)e^x}{2x}=\left[\frac{+\infty\cdot e^{+\infty}}{+\infty}\right]=\left[\frac{+\infty\cdot(+\infty)}{+\infty}\right]=\left[\frac{+\infty}{+\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{((x+2)e^x)'}{(2x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+(x+2)e^x}{2}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+3)e^x}{2}=\left[\frac{+\infty\cdot e^{+\infty}}{2}\right]=\left[\frac{+\infty\cdot(+\infty)}{2}\right]=\left[\frac{+\infty}{2}\right]=+\infty\ .$$